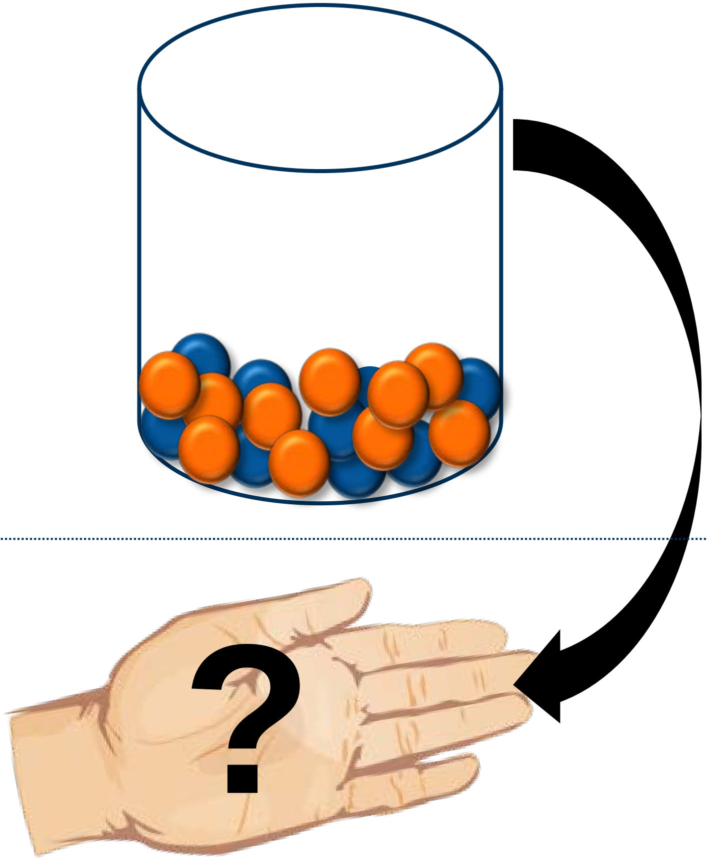
Wahrscheinlichkeitsrechnung vs. Statistik

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Modell

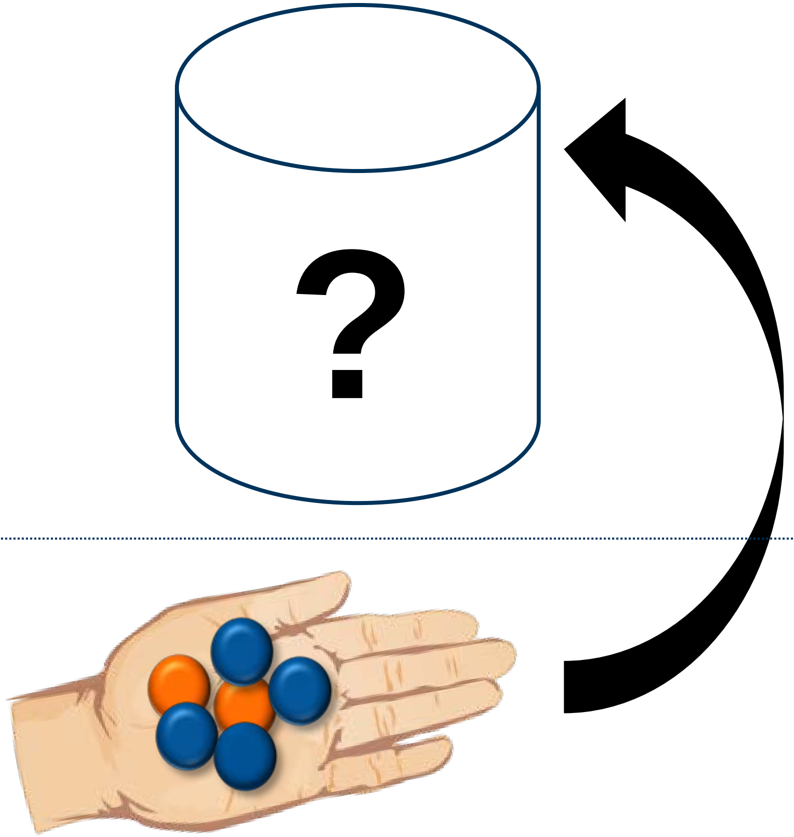
Daten



Gegeben der Informationen über die Urne:

Was und mit welcher W’keit werden wir in den Händen haben?

Statistik



Gegeben der Informationen in unserer Hand:

Was ist in der Urne enthalten und wie sicher sind wir darüber?

Set-up

- Daten $x_1, \ldots, x_n$ betrachtet als Realisierungen von Zufallsvariabelen $X_1, \ldots, X_n \sim F(\theta)$ (i.i.d.)

- Man nimmt an, dass die Modellfamilie $F(\cdot)$ (z.B. normalverteilt) bekannt ist, aber der Parameter θ (z.B. $\theta = (\mu, \sigma^2)$) nicht.

- Ziel:
  anhand von den Daten Rückschlüsse auf das Modell (Parameter) schliessen

- Beispiele für $F(\theta)$:
  - $F(\theta) = Bern(p)$, also $\theta = p$
  - $F(\theta) = Poisson(\lambda)$, also $\theta = \lambda$
  - $F(\theta) = N(\mu, \sigma^2)$, also $\theta = (\mu, \sigma^2)$

Drei Hauptfragen in der schliessenden Statistik

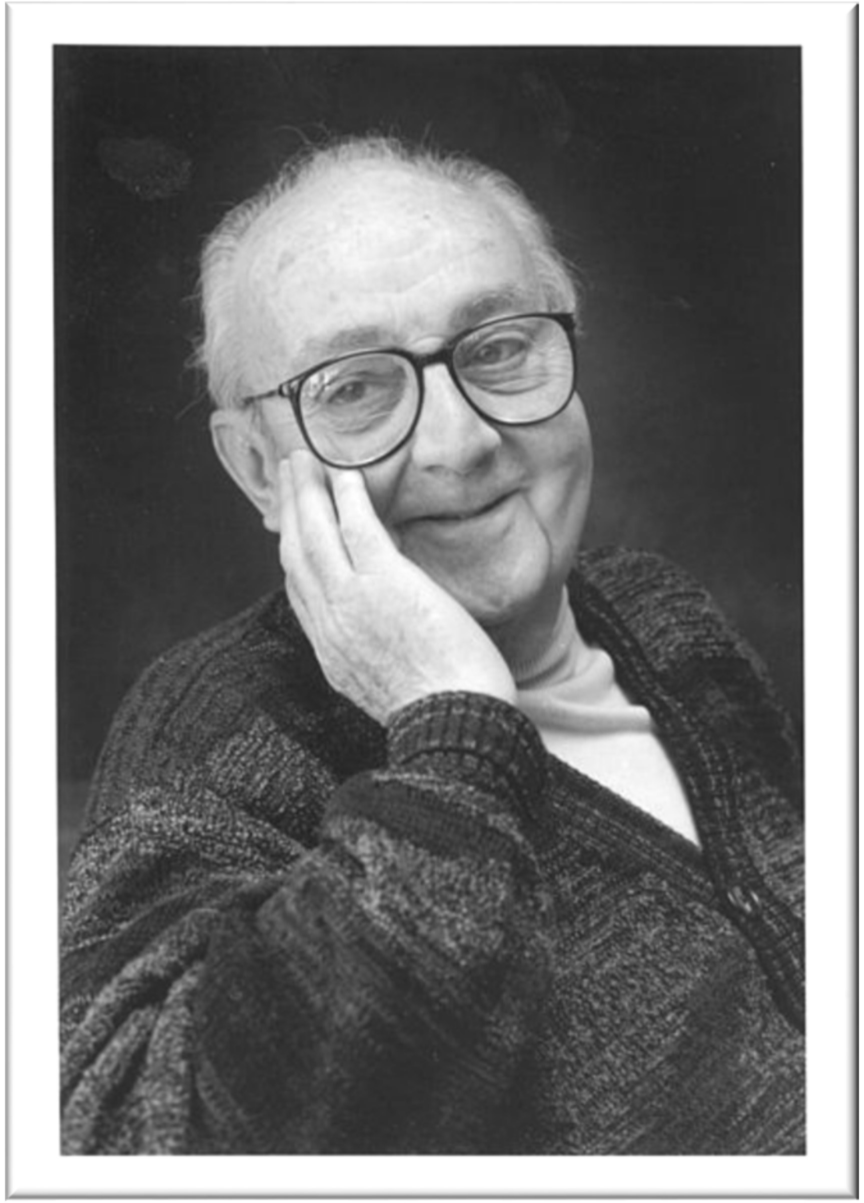
- Welches ist der plausibelste Wert des unbekannten Parameters θ?
  $\longrightarrow$ Punktschätzung (best guess)

Heute

- Ist ein bestimmter vorgegebener Parameterwert θ_0 mit den Daten verträglich?
  $\longrightarrow$ Test

- Was ist der Bereich von plausibelen Parameterwerten?
  $\longrightarrow$ Vertrauensintervall

Zitat George Box



«Essentially, all models are wrong, but some are useful»

Wahl der Verteilungsfamilie

Man kann die Verteilungsfamilie wählen aufgrund von:

- Erfahrung
  (“was sich bisher bewährt hat”)
- physikalischen Argumenten
  (Summe von vielen Effekten sind z.B. gemäss ZGWS normalverteilt)
- grafischen Methoden:
  - Vergleiche empirische Verteilungsfunktion und theoretische Verteilungsfunktion
  - Vergleiche empirisches Histogramm und theoretische Dichte
  - Oft am besten: vergleiche empirische Quantile und theoretische Quantile (QQ Plot)

- Siehe Wandtafel: QQ Plot

Beispiel QQ Plot: Druckfestigkeit

k	$x_{(k)}$
1	24.4
2	27.6
3	27.8
4	27.9
5	28.5
6	30.1
7	30.3
8	31.7
9	32.2
10	32.8
11	33.3
12	33.5
13	34.1
14	34.6
15	35.8
16	35.9
17	36.8
18	37.1
19	39.2
20	39.7

- Messe Druckfestigkeit an $n = 20$ verschiedenen Prüfkörpern.
- Wir wollen schauen, wie gut die Daten mit einer **Normalverteilung** beschrieben werden können.

Beispiel QQ plot: Datensatz Druckfestigkeit

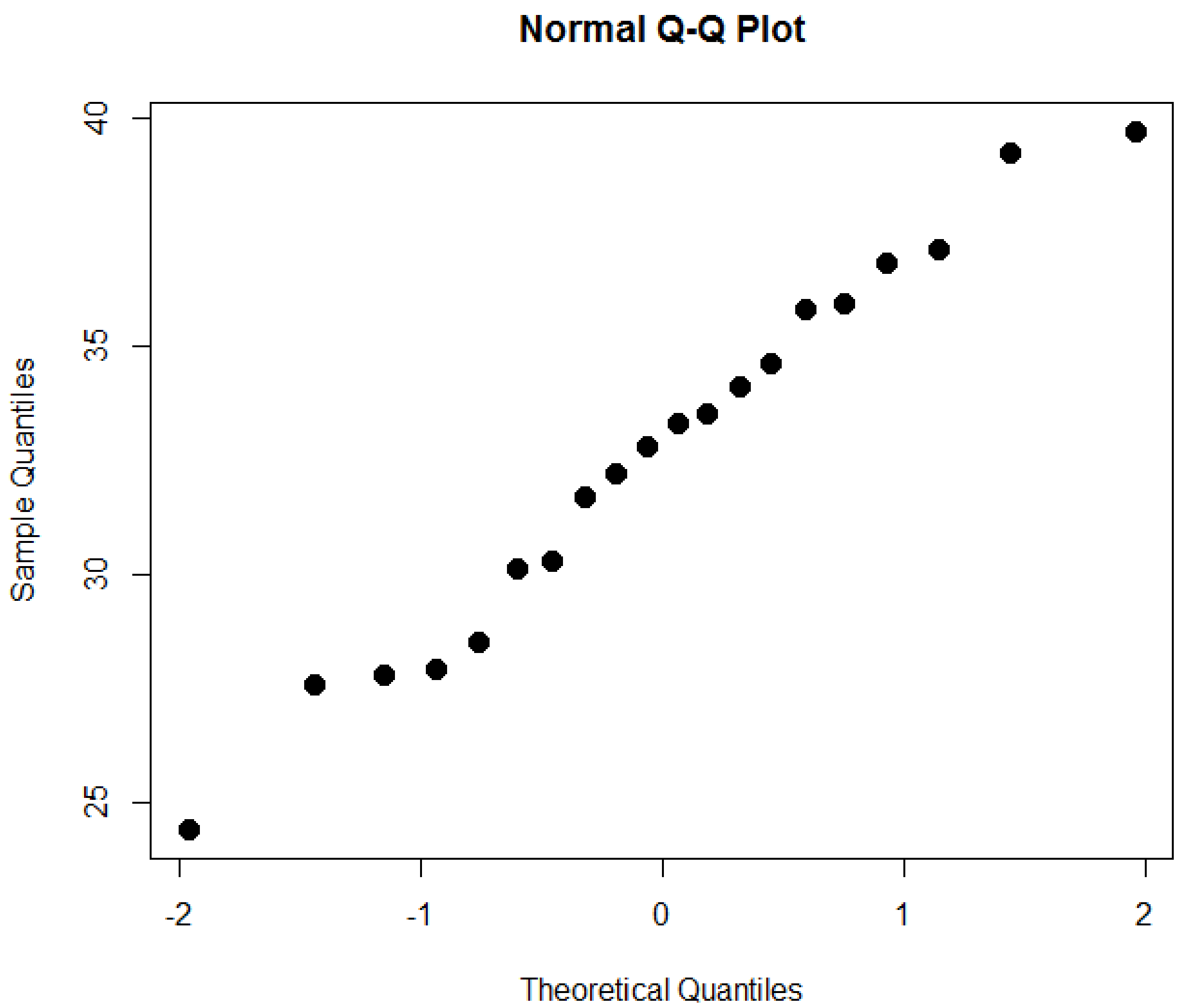
k	$\alpha_k = (k-0.5)/n$	$q_{\alpha_k} = x_{(k)}$
1	0.025	**24.4**
2	0.075	**27.6**
3	0.125	**27.8**
4	0.175	**27.9**
5	0.225	**28.5**
6	0.275	**30.1**
7	0.325	**30.3**
8	0.375	**31.7**
9	0.425	**32.2**
10	0.475	**32.8**
11	0.525	**33.3**
12	0.575	**33.5**
13	0.625	**34.1**
14	0.675	**34.6**
15	0.725	**35.8**
16	0.775	**35.9**
17	0.825	**36.8**
18	0.875	**37.1**
19	0.925	**39.2**
20	0.975	**39.7**

Empirische ($\alpha_k \times 100\%$) Quantile

k	$\alpha_k = (k-0.5)/n$	$\Phi^{-1}(\alpha_k)$
1	0.025	**−1.9600**
2	0.075	**−1.4395**
3	0.125	**−1.1503**
4	0.175	**−0.9346**
5	0.225	**−0.7554**
6	0.275	**−0.5978**
7	0.325	**−0.4538**
8	0.375	**−0.3186**
9	0.425	**−0.1891**
10	0.475	**−0.0627**
11	0.525	**0.0627**
12	0.575	**0.1891**
13	0.625	**0.3186**
14	0.675	**0.4538**
15	0.725	**0.5978**
16	0.775	**0.7554**
17	0.825	**0.9346**
18	0.875	**1.1503**
19	0.925	**1.4395**
20	0.975	**1.9600**

Theoretische ($\alpha_k \times 100\%$) Quantile einer $N(0,1)$ Verteilung

Beispieldatensatz Druckfestigkeit

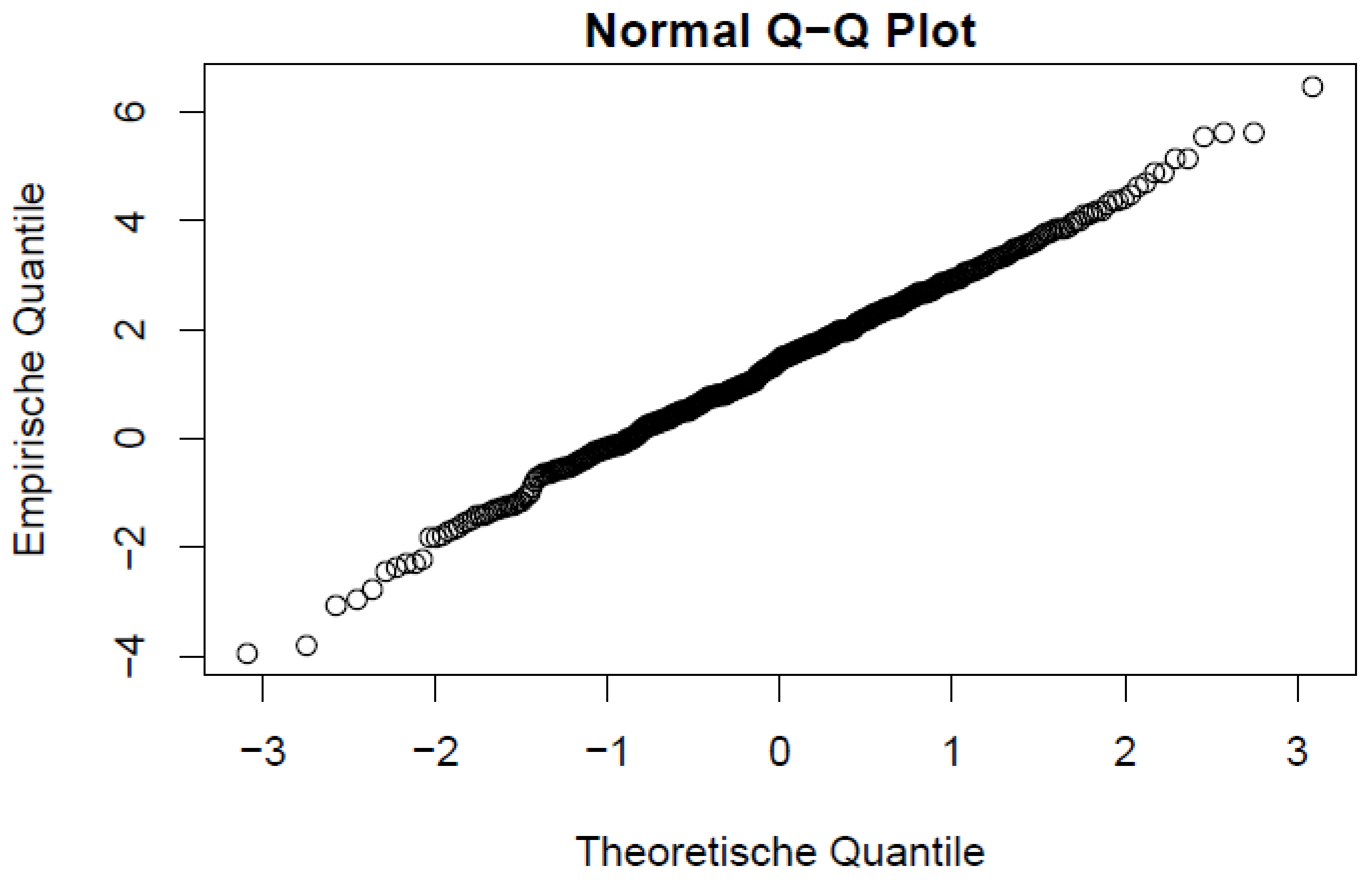


$q_{\alpha_k} = x_{(k)}$

$\Phi^{-1}(\alpha_k)$

Bemerkungen zu QQ-Plots (allgemein)

- Der Trick mit einer **Standard-Referenzverteilung** (wie beim Normalplot) geht auch bei anderen Verteilungen. Manchmal muss man hierzu die Achsen noch umskalieren, z.B. mit log.



Betrachte die Aussagen

a) Die grösste Beobachtung im Datensatz ist ungefähr 3.

b) Der empirische Median ist kleiner als 0.

1. (a) Richtig / (b) Richtig
2. (a) Falsch / (b) Richtig
3. (a) Richtig / (b) Falsch
4. (a) Falsch / (b) Falsch
5. Keine Ahnung

ETH Zürich Edu